Kurt Gödel y el Teorema de Incompletud

Juan Ignacio González Fernández
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

El 28 de abril de este año se celebró el centenario del nacimiento de Kurt Gödel, quien ha sido, sin duda alguna, uno de los pensadores más influyentes de la historia por sus descubrimientos en lógica y matemáticas. Su Teorema de Incompletud de los sistemas formales, también llamado Teorema de Gödel, está considerado como uno de los resultados más sorprendentes de la matemática moderna debido a su importancia para el desarrollo de la filosofía de la matemática por su contribución a la comprensión de lo que significa que algo sea verdad en matemáticas. En la primera sección de este artículo presento brevemente algunos de los rasgos más sobresalientes de la vida y la obra de Gödel. La concepción formalista de las matemáticas, que me parece fundamental para valorar el alcance del Teorema de Incompletud, se expone en la segunda parte. En la tercera sección se ofrece una sencilla explicación del Teorema, y en la parte final del trabajo se comentan algunas de sus repercusiones filosóficas.

Síntesis biográfica

Gödel nació en la antigua localidad de Brünn en Austria-Hungría, lo que ahora es Brno en la República Checa, y durante su vida se destacó por su agudeza intelectual y su personalidad inquisitiva, sensible e introvertida. Se interesó por los idiomas, las matemáticas y la religión. Estudió a profundidad los trabajos de Leibniz y en menor grado, las obras de Kant y Husserl. Perteneció a diversas asociaciones importantes como la Sociedad Americana de Matemáticas, la Academia Nacional de Ciencias, el Instituto de Estudios Avan-

DEVENIRES VII, 14 (2006): 183-194

zados (1946) y la Real Sociedad de Londres (1968).[1] Recibió el primero de los premios Einstein (1951) junto con J. Schwinger y la Medalla Nacional de las Ciencias (1974) así como el título de Doctor *Honoris Causa* por parte de distinguidas universidades como Yale, Harvard, Rockefeller y el Amherst College de Massachusetts. Fue algo inestable emocionalmente y sus temores de salud en su edad adulta le sumergieron en un estado de angustia que le llevó a la muerte el 14 de enero de 1978 en Princeton en los Estados Unidos.

En 1929 se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Viena con una tesis breve en la que demuestra la completud de la lógica de predicados estableciendo la equivalencia entre los conceptos de *consecuencia lógica* (en el contexto semántico) y *demostración* (en el ámbito sintáctico). Esto significa que para la lógica de primer orden se tiene que i) si una expresión es deducible de sus axiomas en un número finito de pasos, entonces la expresión debe ser verdadera, y ii) si cierta expresión es verdadera, entonces debe ser demostrable en un número finito de pasos a partir de su grupo de axiomas o postulados. Este resultado fortaleció la convicción del matemático David Hilbert, quien desde 1920 había estado desarrollando una serie de investigaciones sobre los fundamentos de las matemáticas bajo la suposición de que era posible diseñar en principio un método o procedimiento algorítmico con el cual se pudieran hallar todas las verdades matemáticas a partir de un conjunto de suposiciones y reglas de derivación. Sus esperanzas se derrumbaron tan sólo dos años después, cuando Gödel presentó su Teorema de Incompletud y del cual se tratará más tarde.

Por los años de 1940 Gödel presentó otro resultado en lógica-matemática en el que demostraba que un sistema axiomático de la teoría de conjuntos conserva su consistencia una vez que se añaden el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Este resultado fue muy importante porque permitió que se probara tiempo después la independencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo del resto de los axiomas de dicha teoría.

En esa misma década, Gödel se estableció en Princeton. Allí conoció a Albert Einstein, quien despertó su interés por la filosofía y la Teoría de la Relatividad. En 1949 ofreció una solución a las ecuaciones de campo de Einstein con características muy extrañas. El modelo que planteó presentaba un universo i) en rotación global en lugar de expansión, ii) carente de un orden temporal dinámico absoluto o universal, y iii) en el que existían curvas de tiempo cerradas o CTCs. Una CTC es semejante a la trayectoria que describen las manecillas de un reloj: ambas manecillas parten de un punto en la carátula, como por ejemplo, las "12", y recorren el resto de los puntos de la carátula formando una trayectoria curva que se cierra conforme las manecillas se aproximan nuevamente al punto "12". Pero en el modelo de Gödel, el punto "12" del que parten las manecillas *es el mismo* punto "12" al que llegan, por lo que el paso de las manecillas por las "12" ocurre antes y después que el paso de las manecillas por cada uno de los demás puntos de la carátula que corresponden a los puntos del espacio-tiempo. En otras palabras, la trayectoria o la historia descrita a través del espacio-tiempo de cada punto del universo de Gödel, se aproxima al lugar y momento en el que comenzó, doblándose sobre sí misma, y posibilitando de esta manera la ocurrencia de "viajes en el tiempo".

De acuerdo con Gödel, las condiciones de la Teoría General de la Relatividad implican la imposibilidad de un paso del tiempo objetivo y absoluto. Por lo que en su modelo de universo se tiene que la ocurrencia de los eventos no puede ordenarse globalmente respecto al tiempo en la forma usual, aunque localmente sí es posible. Localmente el tiempo transcurre hacia adelante, desde el pasado hacia el presente (o el futuro), pero globalmente cada evento ocurre antes y después que todos los demás. Su modelo, sin embargo, tiene la desventaja de que no corresponde con la descripción de nuestro universo actual. De cualquier manera, el modelo de universo de Gödel fue el primero en mostrar que las CTCs son físicamente posibles, suponiendo desde luego, que la Teoría General de la Relatividad de Einstein fuese correcta.

La concepción formalista

Durante la década de 1920 Hilbert había estado buscando un esquema o estructura algorítmica que ofreciera de forma definitiva una fundamentación comprensible, claramente organizada, consistente y sólida para la matemática mediante la cual se pudieran derivar todas las verdades que la componen. Tanto él como sus seguidores pensaban que este propósito podía realizarse únicamente incorporando de un modo completo cada una de las áreas y disciplinas de la matemática en un esquema o sistema formalizado y axiomatizado.

La axiomatización formal que Hilbert propuso consistía básicamente en tratar todas las expresiones del sistema como meras cadenas finitas de signos sin significado y en establecer un grupo finito de reglas precisas (cada una expresada por una cadena finita de signos), que prescribieran la correcta manipulación y combinación de los signos. Distinguió tres tipos de reglas: las que declaraban cuáles expresiones eran sintácticamente correctas; aquellas que describían la estructura de las expresiones base del sistema o axiomas; y las reglas de inferencia, que prescribían la manera correcta de derivar nuevas expresiones a partir de los axiomas a través de un proceso de deducción. Las nuevas expresiones se denominaban *teoremas*. La demostración de un teorema consiste en establecer una cadena finita de expresiones de las que puede derivarse el teorema utilizando las reglas de inferencia, y donde cada una de estas expresiones es un axioma o se deriva a su vez de alguna de las expresiones anteriores de la cadena. Estas eran esencialmente las condiciones que Hilbert requería para integrar a cada disciplina de la matemática dentro de su esquema.

La mayoría de los matemáticos involucrados en ese tiempo en la fundamentación de la matemática creían en la importancia o la conveniencia de esta propuesta por tres razones principalmente:

a) La formalización de la matemática permitiría construir una codificación detallada, libre de controvertidas e irrelevantes suposiciones, de los diferentes símbolos gráficos de los que se compone un cálculo matemático formal. Esta maniobra ayudaría a evitar que surgieran paradojas o contradicciones como las que en ese tiempo se habían descubierto en diversas áreas de la matemática (por ejemplo en la teoría de conjuntos) y que amenazaran la validez y consistencia del análisis matemático.

b) Así también, la formalización posibilitaría definir de forma exacta y concreta todas las operaciones y reglas lógicas de deducción que utilizaban los matemáticos, muchas de las cuales estaban siendo utilizadas de manera inconsciente o implícita.

c) Si cada área de la matemática estaba formalmente axiomatizada, todos los teoremas de dicha área podían ser entonces derivados de los axiomas utilizando meramente reglas de deducción. De modo que si se probaba la veracidad y la no contradictoriedad lógica de los axiomas, se probaría la verdad de todos los teoremas y la consistencia de esa área matemática (suponiendo que las reglas se habían aplicado correctamente).

Para la década de 1920 se había demostrado que el problema de la consistencia de muchas disciplinas de la matemática clásica (como la aritmética, la geometría y el análisis) podía reducirse al problema de la consistencia de un sistema axiomático formalizado de la aritmética. Por lo que Hilbert y sus seguidores concentraron sus esfuerzos en incorporar la aritmética a su esquema y probar su consistencia. La prueba de consistencia que buscaban consistía en demostrar en un número finito de pasos que era imposible derivar dos expresiones aritméticas lógicamente contradictorias a partir de los axiomas utilizando las reglas de inferencia del sistema.

El Teorema de Incompletud

En el año de 1931 Kurt Gödel dio a conocer su trabajo "Sobre sentencias formalmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines"[2] donde expone su Teorema de Incompletud sintáctica. Este Teorema, aunque técnicamente complicado, establece una idea sencilla, a saber, que en todo sistema axiomático formal y consistente de la aritmética —o lo suficientemente rico para expresar el concepto de número natural— es imposible construir un grupo de axiomas del cual puedan derivarse todas sus fórmulas aritméticas verdaderas, porque en todo sistema con tales condiciones se pueden construir fórmulas aritméticas *indecidibles*, donde indecidible significa que ni la afirmación ni la negación de la fórmula pueden demostrarse utilizando los axiomas y reglas del sistema.

Gödel observó que podía discutir las propiedades de las fórmulas y expresiones de un sistema formalizado de la matemática mediante una aritmetización de su lenguaje o sintaxis. La aritmetización de la sintaxis, también llamada una "gödelización", consiste en asignar un número natural a cada símbolo, a cada fórmula o expresión matemática y a cada grupo de expresiones, siguiendo un orden definido. Este número distintivo es llamado "número de Gödel" del símbolo, expresión o grupo de expresiones. Con la aritmetización, las afirmaciones metamatemáticas o declaraciones acerca del sistema matemático formalmente axiomatizado —por ejemplo, de la aritmética—, podían ser también adecuadamente *representadas* o *reflejadas* mediante una secuencia de números en la aritmética misma. De esta manera, como a toda expresión de la aritmética se le puede asociar un número Gödel, se pueden construir fórmulas metamatemáticas acerca de las (propiedades y relaciones entre las) expresiones de la aritmética como si fueran fórmulas acerca de sus respectivos números Gödel (y sus propiedades y relaciones) dentro de la propia aritmética.

Gödel construyó entonces una expresión metamatemática G de forma tal que afirmara que un determinado número tenía una cierta propiedad específica. De acuerdo con la aritmetización utilizada, ese número era el número Gödel que correspondía a la expresión misma, y la propiedad se refería a la propiedad de no tener demostración o derivabilidad dentro del sistema; por lo que la fórmula G interpretada de forma natural decía de sí misma que no era demostrable. Considérese la expresión metamatemática "la fórmula con número Gödel G no es demostrable". Debido a la aritmetización utilizada, esta expresión metamatemática está representada en la aritmética por el número Gödel G. Por un lado se tiene que la expresión metamatemática "la fórmula con número Gödel G no es demostrable" es verdadera si y sólo si (el número Gödel) G (al que se refiere) no es demostrable; y por otro lado, se tiene que la expresión metamatemática "la fórmula con número Gödel G no es demostrable" es demostrable si y sólo si (su número Gödel) G (que le corresponde) es demostrable. Por tanto, se tiene que (el número Gödel) G (de la expresión) es demostrable si y sólo si (el número Gödel) G (a que se refiere la expresión) no es demostrable. Pero como el número al que se refiere la expresión coincide con el número Gödel de la expresión misma, se tiene que G es demostrable si y sólo si G no es demostrable.[3] Pero suponiendo que el sistema fuera consistente, se tiene que, o bien G es demostrable, o bien G no es demostrable, pero no ambos. De lo cual se concluye que si el sistema es consistente G debe constituir entonces una expresión indecidible; y además verdadera, puesto que G afirma su propia no demostrabilidad. Esto significa, por consiguiente, que en cada sistema formal axiomático y consistente de la aritmética existen expresiones que son verdaderas pero indemostrables. Lo anterior se ilustra con la siguiente expresión metamatemática P:

$$P \leftrightarrow P \textit{ no tiene demostración dentro del sistema}$$

Aquí P se ha construido de modo que afirme de sí misma lo que se lee en el lado derecho de la fórmula: que no existe una demostración de P dentro del sistema. A partir del contenido de la expresión en el lado derecho concluimos que P no tiene demostración, porque si P tuviera una demostración entonces la expresión del lado derecho sería falsa, lo que implicaría que P fuera falsa. Por lo que tenemos que P es falsa y además tiene demostración, lo cual no puede ocurrir en un sistema que *deseamos sea consistente*. Por lo tanto concluimos que si el sistema es consistente, P no tiene demostración, lo cual implica que tanto el lado derecho como el izquierdo deben ser verdaderos. Pero en este último caso tenemos una fórmula que es verdadera y que no es demostrable o deducible dentro del sistema.

Se puede ofrecer el mismo tratamiento si partimos de la negación formal de P, de modo que al final se tiene que P es una expresión tal que ni su afirmación ni su negación son derivables de los axiomas utilizando las reglas de inferencia del sistema.

Tal vez el lector piense que P podría demostrarse dentro del sistema añadiendo más axiomas al grupo original, pero Gödel demostró que aún esta medida es inútil. Aunque P se introduzca como un nuevo axioma, se podría aplicar el mismo procedimiento y encontrar otra fórmula indecidible para el sistema ampliado.

La estructura del Teorema de Incompletud, como el mismo Gödel comenta, se apoyaba en el argumento implícito de una paradoja propuesta por el matemático Jules Richard en 1905.[4] Para ilustrar esta paradoja partamos de la suposición de que todo número natural puede definirse en lengua castellana de alguna manera utilizando la menor cantidad de letras. Por ejemplo, el número natural 40 puede nombrarse o definirse en lengua castellana como "cuarenta" o "cinco por ocho", de las cuales se elige la primera definición porque tiene la menor cantidad de letras. Hagamos luego una lista de los números naturales de acuerdo a la cantidad de letras de sus nombres y al orden lexicográfico de sus definiciones. Los primeros diez números de la serie resultan ser entonces: (1, 2), (2, 1000), (3, 1), (4, 100), (5, 10), (6, 12), (7, 8), (8, 11), (9, 6), (10, 3). Todos los pares de números de la serie tienen la forma (x, y) donde x es un número natural que representa el lugar en la lista e y es el número natural que se define en la lengua castellana. Ahora, un número natural x es richardiano si el número y con el que está asociado en la lista puede nombrarse o definirse en castellano de cualquier manera utilizando más de cincuenta letras. Se puede observar que los primeros diez números de la lista mencionados no son richardianos porque cada uno de los números a los que están asociados puede nombrarse o definirse con menos de cincuenta letras. Y ciertamente, a lo largo de la serie encontraremos muchos números naturales que son richardianos porque están asociados con números cuyos nombres (o definiciones) tienen más de cincuenta letras. De estos últimos, particularmente uno es el interesante: el mínimo, cuyo nombre contiene exactamente cincuenta y un letras.[5] Lo interesante de este número que llamaremos p se expone a continuación. El número p debe estar asociado a otro número natural según la lista ordenada de expresiones, sea m ese otro número natural, de manera que se tiene la pareja (m, p). ¿Es m richardiano? La respuesta es sí y no. Sí, porque m tiene asociado el número p cuyo nombre o definición tiene cincuenta y un letras. No, porque m tiene asociado el número p que puede definirse también en la lengua castellana con el nombre "el mínimo número natural con más de cincuenta letras", y la frase "el mínimo número natural con más de cincuenta letras" contiene menos de cincuenta letras. Por lo que p puede nombrarse con menos de cincuenta letras y por consiguiente, m no es richardiano. De manera que m no es richardiano si y sólo si m es richardiano, lo cual es una contradicción.

La analogía entre el razonamiento expresado por la paradoja richardiana y el expresado por el Teorema de Gödel queda ilustrada al observar que se puede establecer una correspondencia entre los términos "número natural" y "expresión aritmética", entre la propiedad de "ser richardiano" y la propiedad de "ser demostrable dentro del sistema". De modo que la conclusión de que el número natural m es richardiano si y sólo si no es richardiano, es análoga a la conclusión de que la expresión aritmética G tiene la propiedad de ser demostrable si y sólo si no es demostrable en el sistema. La diferencia entre ambos argumentos radica en que la contradicción en el razonamiento de Richard se origina debido a la confusión entre los nombres de los números naturales propiamente y el nombre que se les atribuye según su lugar en la lista. El nombre "el mínimo número natural con más de cincuenta letras" no es *estrictamente* un nombre para p, sino que se refiere a la notación que se le da a p de acuerdo al lugar que ocupa en la lista según la manera como se ordenaron los nombres de los números naturales. Por lo que la contradicción se destruye haciendo una clara distinción entre las expresiones nominales de los números y las expresiones acerca de la manera en como fueron denotadas. El argumento de Gödel evita ingeniosamente la confusión que comete Richard porque las expresiones metamatemáticas no se identifican con las expresiones aritméticas con las que se encuentran asociadas, sino que están meramente representadas o reflejadas en la aritmética. De este modo se mantiene la distinción entre las expresiones aritméticas y sus expresiones metamatemáticas haciendo una separación entre las expresiones que tratan de lo que la expresión señala, de aquellas que tratan de la expresión misma. Por consiguiente, la expresión metamatemática G resulta ser verdadera cuando se supone la consistencia del sistema, afirmación que no puede hacerse en el caso de Richard.

Algunas consecuencias del Teorema de Incompletud

Como consecuencia de su Teorema, Gödel demostró que todo sistema formal de la aritmética que cumpla con las condiciones de Hilbert puede afirmar de sí mismo que es consistente, pero no puede demostrar dicha afirmación con sus propios axiomas y reglas, es decir, que no hay manera de probar dentro del sistema que la aritmética no contiene contradicciones. De nuevo, el lector podría sugerir la existencia de otro sistema axiomático formal que pruebe la consistencia del primero. Pero esta solución no es de mucha ayuda porque se puede aplicar el Teorema de Gödel a este segundo sistema y encontrar que tampoco puede demostrar su no contradictoriedad. Luego, esta solución simplemente traslada el problema al segundo sistema, el cual necesita un tercer sistema diferente también formalmente axiomatizado que pruebe la consistencia del segundo, y este tercer sistema necesita a su vez un cuarto sistema que demuestre la consistencia del tercero, y así indefinidamente.[6]

Aunque el Teorema de Gödel no influyó en el cálculo matemático propiamente, está considerado como un resultado crucial en la lógica-matemática del siglo XX por su influencia en la mentalidad de los matemáticos, que cambiaron su forma de pensar respecto a la fundamentación filosófica de la matemática. Con su Teorema, Gödel destruyó las esperanzas de aquellos que, como Hilbert, buscaban demostrar que la matemática (o la aritmética por ejemplo) podía formalizarse de un modo consistente y completo, porque mostró que la formalización de la aritmética presentaba serias limitaciones, a saber,

i) que es imposible derivar todas sus expresiones sintácticamente correctas a partir de su grupo de axiomas, y ii) que existe una sutil diferencia entre *verdad* y *demostración*.

En los sistemas axiomáticos formales el concepto de demostración se define en términos de derivabilidad. Como se mencionó en la segunda sección, la demostración de un teorema matemático requiere emplear las reglas de inferencia del sistema para hallar una cadena finita de expresiones de las que pueda derivarse el teorema y donde cada una de estas expresiones es un axioma o se infiere a su vez de alguna fórmula anterior ya establecida en él. El procedimiento para la demostración es por consiguiente meramente mecánico o algorítmico. Una calculadora, una computadora y la mente humana pueden realizar este tipo de demostraciones de forma mecánica construyendo una secuencia finita de operaciones deductivas a partir de cierto grupo finito de datos iniciales. Pero esto no puede hacerse para todas las expresiones posibles en aquellos sistemas que traten de incorporar la aritmética, porque en cada uno de esos sistemas hay expresiones —como P y G— que no podemos demostrar en el sentido arriba mencionado.

Pero a pesar de ello, "observamos" que P y G son verdaderas. Existe *algo* dentro del razonamiento matemático que nos permite saber que el proceso ejecutado tiene sentido, o que cierto tipo de fórmulas son verdaderas aunque no podamos encontrar una cadena de símbolos de la cual puedan deducirse. A partir de esta conclusión, muchos matemáticos, incluyendo al mismo Gödel, se han inclinado a manifestar que el concepto de verdad no puede definirse en términos de derivabilidad; dando a entender con esto que la reflexión matemática humana implicada en este saber o acto de "observación" no puede ser "el resultado de las operaciones puramente algorítmicas que pudieran ser codificadas en algún sistema matemático formal" (Penrose, p. 151). En consecuencia, afirman que la mente humana es superior o "más potente y compleja" (Nagel y Newman, p. 123-4) que cualquier máquina que utilice un algoritmo en base a reglas y axiomas, porque la mente, a diferencia de las máquinas, *sabe distinguir* las expresiones verdaderas. Estos matemáticos manifiestan que tal tipo de saber escapa a la formalización y que por tanto debe realizarse desde fuera del sistema o mediante otros métodos, por ejemplo informales.[7] Se debe subrayar, sin embargo, que estas afirmaciones son correctas solamente dentro de un sistema formal deductivo que se *supone* es consistente, y que no está claro *cómo* es que la mente tiene ese saber o habilidad para diferenciar las expresiones verdaderas.

En la prueba de su Teorema, Gödel creó la teoría de las funciones recursivas[8] que ha contribuido al desarrollo de la informática moderna y que constituye la base de diversos resultados referentes a los límites de la computación de números. Uno de estos resultados es la tesis Church-Turing de 1936 que ha generado profundas discusiones —y confusiones— concernientes a la naturaleza de la inteligencia artificial y de la conciencia humana.[9] Esta tesis constituye la respuesta negativa que dieron Church y Turing de forma independiente —y para muchos, definitiva— a la cuestión planteada por Hilbert sobre la posibilidad en principio de diseñar algún algoritmo, máquina o procedimiento mecánico que diera solución a todo problema matemático (de cierta clase bien definida).[10]

Bibliografía

Brown, S., *et al.*, 2001. *Cien filósofos del siglo XX*, México, Diana.

Gödel, K., 1981. *Obras completas*, J. Mosterín (traductor y compilador), Madrid, Alianza Editorial.

Hofstadter, D., 1999. "Kurt Gödel", *Time* Vol. 153, No. 12, marzo 29.

Kline, M., 1992. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, vol. III, Madrid, Alianza Editorial, Cap. 51, pp. 1562-1600.

Nagel, E., Newman, J. R., 1981. *El teorema de Gödel*, México, Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Penrose, R., 1995. *La nueva mente del emperador*, Barcelona, Grijalbo Mondadori, Cap. 4, pp. 136-53.

Wikipedia contributors, "Kurt Gödel", *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kurt_G%C3%B6del&oldid=86156600 (Último acceso 8 de noviembre de 2006)

Notas

1. Gödel perteneció también al Círculo de Viena sin adoptar la filosofía lógico-positivista de este grupo. Más bien, parece haber acogido una cierta forma de realismo platónico en el que reconoce la existencia de ciertos conceptos (matemáticos por ejemplo) que son cognoscibles mediante algún tipo de percepción intelectual o intuición.

2. *Principia Mathematica* resume el monumental intento de B. Russell y A. N. Whitehead (1910-13) de demostrar que todo concepto y contenido de la aritmética podía ser reducido a un esquema axiomático y formal de la lógica.

3. Gödel demostró originalmente un teorema más débil, pero la diferencia con lo aquí expuesto es sólo técnica. Véase la generalización del Teorema de Incompletud realizada por J. B. Rosser en 1936 en Nagel y Newman, p. 111.

4. Ambos razonamientos se fundamentan en el argumento por diagonalización de Cantor (1891) sobre la imposibilidad de establecer una correspondencia uno a uno entre los reales y los naturales. Aquí expongo una versión simplificada de la paradoja de Richard similar a las presentadas en Kline, p. 1564 y en Nagel y Newman, pp. 83-5.

5. Existen muchos números naturales que se pueden nombrar con exactamente cincuenta y un letras (por ejemplo el 144 447 y el 144 445 por citar sólo dos). Sin embargo, mediante el criterio de ordenación lexicográfico que estamos utilizando existe el primero o "mínimo" de entre todos ellos.

6. Pero esto no significa que la aritmética que el lector aprendió en la escuela no sea consistente. Las pruebas que se han desarrollado de la consistencia de la aritmética (natural) se han realizado omitiendo o modificando las condiciones de Hilbert.

7. Este tipo de saber —que precisamente muchos formalistas deseaban eliminar del análisis mediante la formalización de la matemática— ha sido identificado por muchos autores como "intuición", "percepción inmediata" o "sensibilidad matemática".

8. Una función es recursiva, *grosso modo*, si es derivable a partir de una cadena numerable de expresiones (cada una de ellas compuesta por una colección finita de signos) que comience en uno o varios axiomas. Mediante el uso de funciones recursivas se puede construir un algoritmo o *programa* para que una persona o un ordenador compute mecánicamente la demostración de una fórmula dada.

9. Ver por ejemplo, R. Penrose, *La nueva mente del emperador*, Barcelona, Grijalbo Mondadori, 1995, pp. 516-8.

10. Agradezco al profesor Luis Ignacio Flores Bocanegra por facilitarme parte del material bibliográfico en la realización de este trabajo.